$$= 1 - e^{-a}\left(1 + \frac{a^1}{1!}\right) \text{ Vrai}$$

II) Supposons que le résultat est vrai à l'ordre n et montrons que :

$$I_{n+1}(a) = 1 - e^{-a}\left(1 + \frac{a^1}{1!} + \ldots\ldots + \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\right)$$

En effet: $I_{n+1}(a) - I_n(a) = -\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \times e^{-a}$ d'après 3) a)

Donc on a :

$$I_{n+1}(a) = I_n(a) - \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \times e^{-a}$$

$$I_{n+1}(a) = 1 - e^{-a}\left(1 + \frac{a^1}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{a^n}{n!}\right) - \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \times e^{-a}$$

$$I_{n+1}(a) = 1 - e^{-a}\left(1 + \frac{a^1}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{a^n}{n!} + \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\right)$$

Conclusion:

$\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{I_n(a) = 1 - e^{-a}\left(1 + \frac{a^1}{1!} + \ldots\ldots + \frac{a^n}{n!}\right)}$$

On suppose que : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n(a) = 0$

Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} 1 - e^{-a}\left(1 + \frac{a^1}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{a^n}{n!}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} e^{-a}\left(1 + \frac{a^1}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{a^n}{n!}\right) = 1$$

Multiplions par e^a et remarquant que $e^a . e^{-a} = 1$ On trouve:

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{a^1}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{a^n}{n!} = e^a}$$

Exercice 16

$$\begin{cases} f(x) = x\ln(1-x) + \frac{1}{4}, & x < 0 \\ f(x) = \frac{e^x}{x^2+4}, & x \geq 0 \end{cases}$$

1) a) */ Continuité en 0 :

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x\ln(1-x) + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4} = f(0)$$

f est continue à gauche en 0.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x}{x^2+4} = \frac{1}{4} = f(0)$$

f est continue a droite en 0 .

Conclusion :

f est continue en 0 :

*/ Dérivabilité en 0 :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x\ln(1-x) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{x\ln(1-x)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \ln(1-x)$$

$$= \ln 1 = 0 = f_g'(0)$$

f est dérivable a gauche en 0.

$$\text{*/ } \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{e^x}{x^2+4} - \frac{1}{4}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{4e^x - 4 - x^2}{4(x^2+4)x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{4(e^x - 1)}{4(x^2+4)x} - \frac{x^2}{4(x^2+4)x}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left[\left(\frac{e^x - 1}{x}\right).\left(\frac{1}{x^2+4}\right) - \frac{x}{4(x^2+4)}\right]$$

$$= 1 \times \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4} = f_d'(0)$$

f est dérivable a droite en 0.

Conclusion :

$f_g'(0) \neq f_d'(0)$ Donc f n'est pas dérivable en 0.

b) pour $x < 0$:

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn